# CONIQUES

# COMPLEMENT

Date de création : 19 avril 2012.

# I BUT DU DOCUMENT

Le site contient déjà la démonstration des équations réduites des coniques à partir de leur définition par rapport au cône.

Nous allons montrer ici comme écrire l'équation des coniques en coordonnées polaires et aussi parler de l'affinité d'une ellipse en faisant intervenir un cercle de diamètre 2a.

# II EQUATION POLAIRE

Rappelons les définitions.

1° Toutes les coniques peuvent être engendrées par l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan, d'où leur nom.

La parabole est le lieu des points équidistants d'un point fixe F (foyer) et d'une droite fixe D (directrice).

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F' (foyers) est constante.

On pose FF' = 2c, MF + MF' = 2a > 2c

L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes F et F' (foyers) est constant.

On pose FF' = 2c, |MF-MF'| = 2a > 2c.

Tout ceci est clairement détaillé sur mon site.

2° Equation en coordonnées polaires (origine au foyer).

Ce qui suit n'a jamais été traité sur ce site, les démonstrations s'impose, elles se baseront sur des définitions déjà connues.

Cette équation est :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_o)}$$

Elle est commune à toutes les coniques.

Soit par un choix de θ à l'origine approprié.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Où $p = b^2/a$ (pour l'ellipse $a^2 = b^2 + c^2$, pour l'hyperbole $c^2 = a^2 + b^2$), et e l'excentricité : e = c/a.

L'excentricité caractérise le genre de la conique e > 1 : hyperbole ; e = 1 : parabole ; 0 ≤ e < 1 : ellipse.

D'après l'équation polaire, on peut vérifier les conditions pour e.

$$r = \frac{p}{1 + ecos\theta}$$

Si e < 1, r ne peut pas devenir infini, ce cas correspond à l'ellipse.

Si e > 1, il peut y avoir deux valeurs de θ telles que r = ∞, on a donc une hyperbole.

Enfin si e = 1, il n'y a que θ = π qui répond à 1 + ecosθ = 0, on a donc une parabole.

Etablissons l'équation pour les trois coniques, et vérifions qu'elle est bien commune.

Pour l'instant, celles qui sont connues sont :

Ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabole :

$$y^2 = 2px$$

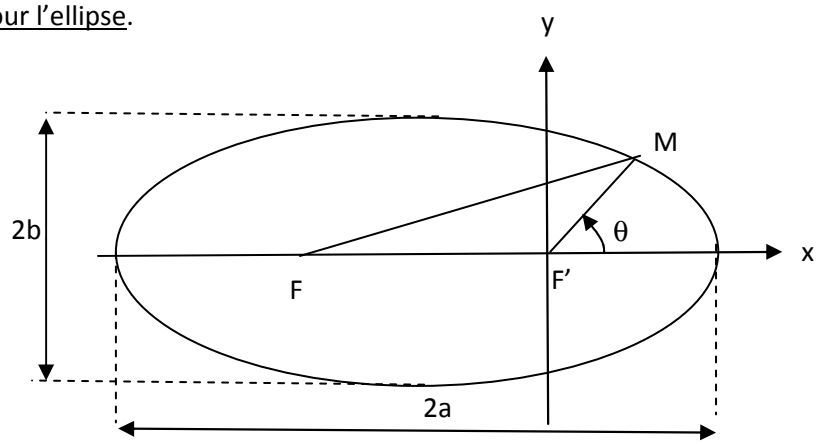
Ces équations sont dites réduites, ce qui signifie que le repère a pour origine le centre de symétrie, l'axe Ox passe par l'axe a.

En ce qui concerne la parabole, le centre du repère est au sommet, il y a une symétrie par rapport à l'axe Ox.

Il faudra donc faire attention au fait qu'en coordonnées polaires, le centre du repère est au foyer et non au centre (ellipse hyperbole) ou au sommet (parabole).

En coordonnées polaires, avec pour centre, le foyer.

<u>Pour l'ellipse</u>.



$$F'M + MF = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(FF' + x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(2c + x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{r^2} + \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cx} = 2a$$

$$\sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cx} = 2a - r$$

$$r^2 + 4c^2 + 4cx = 4a^2 + r^2 - 4ar$$

$$4c^2 + 4cx = 4a^2 - 4ar$$

$$c^2 + cx = a^2 - ar$$

$$c^2 + crcos\theta = a^2 - ar$$

$$r = \frac{a^2 - c^2}{ccos\theta + a}$$

$$r = \frac{a - c^2/a}{\frac{c}{a}cos\theta + 1}$$

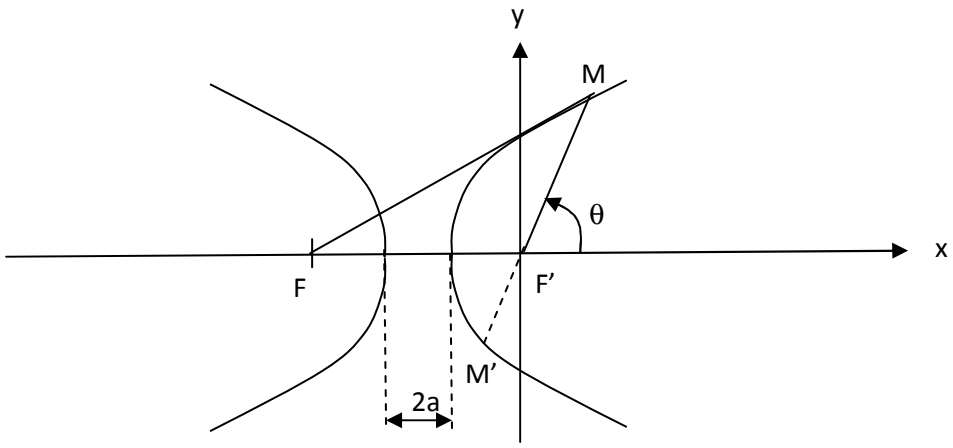
$$r = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{\frac{c}{a}cos\theta + 1}$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}cos\theta + 1}$$

$$r = \frac{p}{ecos\theta + 1}$$

Voila qui est fait pour l'ellipse.

Passons au cas de l'hyperbole.




Pour l'ellipse : FM + F'M = Cte, pour l'hyperbole c'est la quantité |MF-MF'| qui est constante.

Quand on voit le dessin, on peut retirer la valeur absolue, on voit que c'est FM – F'M qui vaut 2a et non l'inverse, car a est une longueur, c'est quelque chose de positif, il s'agit de la distance entre les deux sommets, comme pour l'ellipse.

$$FM - F'M = 2a$$

$$\sqrt{(FF' + x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(2c + x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cx} - \sqrt{r^2} = 2a$$

$$\sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cx} = 2a + r$$

$$r^2 + 4c^2 + 4cx = 4a^2 + r^2 + 4ar$$

$$4c^2 + 4cx = 4a^2 + 4ar$$

$$c^2 + cx = a^2 + ar$$

$$c^2 + crcos\theta = a^2 + ar$$

$$r = \frac{a^2 - c^2}{ccos\theta - a}$$

Pour l'hyperbole $c^2 = a^2 + b^2$

Le terme b est plutôt une définition de cette équation, contrairement à l'ellipse, on ne peut parler de petit axe puisque la courbe se projette à l'infini.

$$r = \frac{a - c^2/a}{\frac{c}{a}cos\theta - 1}$$

$$r = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{\frac{c}{a}cos\theta - 1}$$

$$r = \frac{-\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}cos\theta - 1}$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{-\frac{c}{a}cos\theta + 1}$$

$$r = \frac{p}{-ecos\theta + 1}$$

$$r = \frac{p}{1 - ecos\theta}$$

En fonction du choix de θ, on peut aussi avoir :

$$r = \frac{p}{1 + ecos\theta}$$

Par exemple :

$$cos(\pi - \theta) = cos\pi cos\theta + sin\pi sin\theta = -cos\theta$$

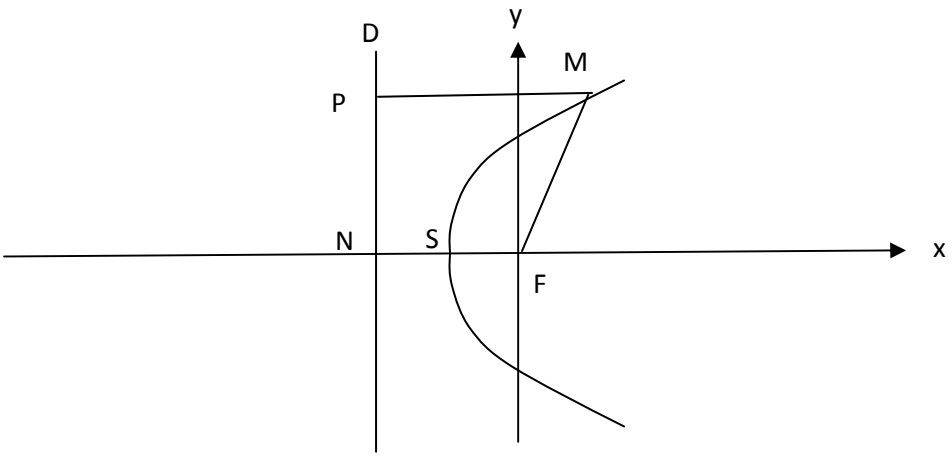
Mais on a aussi.

$$cos(\pi + \theta) = cos\pi cos\theta - sin\pi sin\theta = -cos\theta$$

Quad q varie de 0 à p, on trace la partie supérieure de l'hyperbole, si on travaille avec p + q, on trace la partie inférieure, r = F'M se change en r = F'M', ça ne change vraiment rien.

Cas de la parabole :

Lieu des points équidistants entre un foyer et une droite directrice D.




On a bien évidemment SF = NS qui représente le cas M = S.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = MP$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x - x_N$$

Soit :

$$r = x - x_N$$

$$r = rcos\theta - x_N$$

$$r = \frac{-x_N}{1 - cos\theta}$$

Puisque e = 1, et en choisissant θ.

$$r = \frac{-x_N}{1 + ecos\theta}$$

Pouvons-nous écrire :

$$x_N = -p = b^2/a$$

Après tout pourquoi pas pour xN = -p, on n'est pas obligé de chercher un terme $b^2/a$ car en ce qui concerne b, nous sommes dans le cas de l'hyperbole et a n'a pas de sens puisqu'il n'y a qu'un seul sommet.

Déjà pour l'hyperbole, on ne pouvait parler que de a, b n'avait de sens que par définition comme étant égal à la racine carrée de $a^2 - c^2$.

Reprenons l'expression :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x - x_N$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + x_N^2 - 2x.x_N$$

$$y^2 = x_N^2 - 2x.x_N$$

Remarque :

La forme réduite d'une parabole c'est :

$$y^2 = 2px$$

Mais dans cette équation, l'origine est au sommet et non au foyer.

Si on a X (origine en F) et x (origine en S) alors $X = x - x_F = x + x_N$

$$y^2 = 2px = 2p(X - x_N)$$

On a $xN = 2X_N$

$$y^2 = 2px = 2p\left(X - \frac{X_N}{2}\right)$$

Si $p = - X_N$

$$y^2 = -2X_N\left(X - \frac{X_N}{2}\right)$$

$$y^2 = -2X_N.X + X_N^2$$

Ce qui ressemble tout à fait à :

$$y^2 = x_N^2 - 2x.x_N$$

Dont la seule différence est une convention d'écriture avec X dans un cas et x dans l'autre.

Le paramètre p vaut :

$p = - x_N$ (origine en F).

$p = - 2x_N$ (origine en S).

On n'a pas besoin d'utiliser les deux symboles x et X du moment que l'on a précisé l'origine.

L'équation de la parabole est :

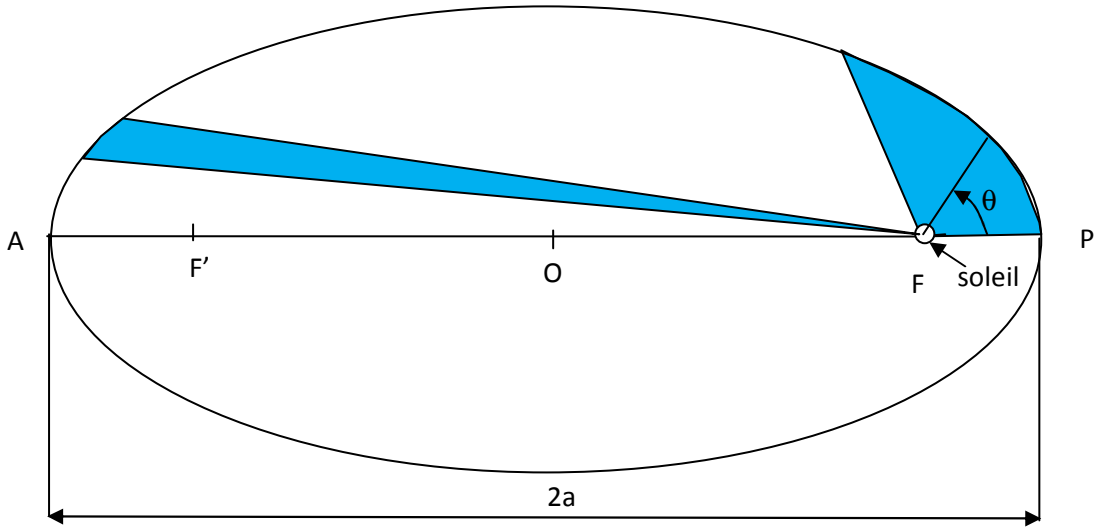
$$y^2 = 2p.x\ (origine\ en\ S)$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}\ (origine\ en\ F)$$

## III ELLIPSE INSCRITE DANS UN CERCLE

Application : mouvement des planètes.

L'observation a montré que les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, il s'agit de la première loi de Kepler.




Le point P est le périhélie, c'est le point le plus proche, le point A est le point le plus éloigné, que l'on nomme aphélie.

Les deux aires en bleu sont égales, ce sont deux aires balayées en des temps égaux, l'attraction du soleil est une force centrale, c'est pourquoi on applique la loi des aires.

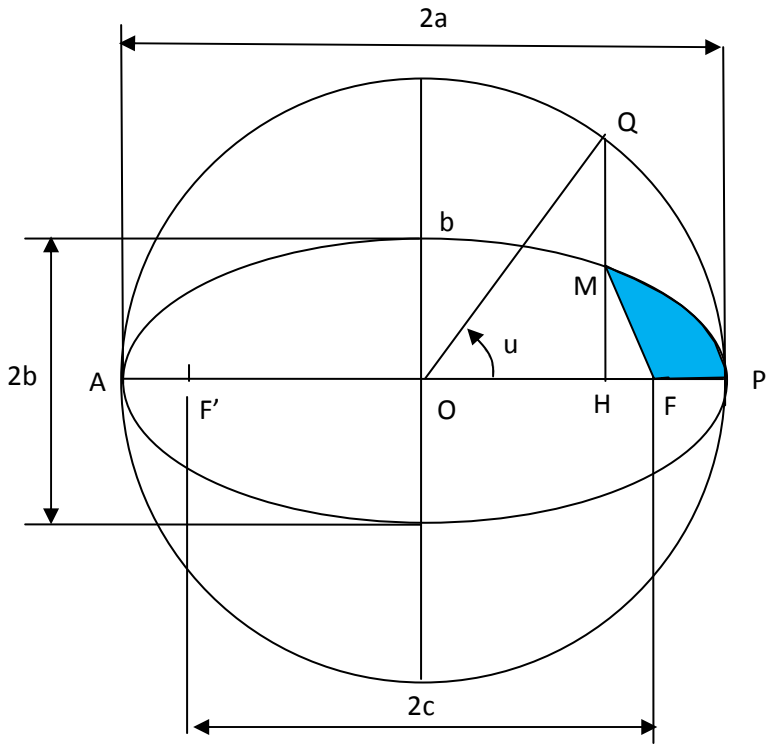
Il s'agit de la seconde loi de Kepler.

L'équation de Kepler est :

$$u - e.sin(u) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

Nous l'établirons à partir du dessin de la page suivante sur lequel on voit l'angle u.

Dessin de l'ellipse inscrite dans un cercle.




Le But de ce chapitre est de démontrer qu'il existe une affinité telle que :

$$\frac{MH}{QH} = \frac{b}{a}$$

Ou encore :

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$$

Avec y(x) : équation de l'ellipse et Y(x) : équation du cercle de rayon a.

On a :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Cette relation est facile à retrouver si on se souvient comment on trace une ellipse à partir d'une ficelle.

Définition :

On appelle excentricité le rapport :

$$e = \frac{c}{a}$$

L'aire de l'ellipse se déduit de celle du cercle grâce à l'affinité de rapport b/a, l'aire du cercle étant $\pi.a^2$, celle de l'ellipse vaut :

$$S = \pi a.b$$

Nous démontrons d'abord l'affinité et ensuite, la formule S = πab

Equation réduite d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$QH^2 = OQ^2 - OH^2 = a^2 - x^2$$

$$MH = y$$

$$\frac{MH^2}{QH^2} = \frac{y^2}{a^2 - x^2}$$

Il suffit de remplacer y par sa fonction.

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Et de le reporter dans MH/QH

$$\frac{MH^2}{QH^2} = \frac{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{a^2 - x^2}$$

$$\frac{MH^2}{QH^2} = \frac{b^2/a^2(a^2 - x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{MH}{QH} = \frac{b}{a}$$

Que l'on écrit aussi :

$$\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a}$$

Ou encore : y = ye (ellipse) que l'on note yM et yc (cercle) que l'on note yQ.

$$\frac{y_M}{y_Q} = \frac{b}{a}$$

La démonstration est faite, est-ce que l'affinité permet de calculer la surface de l'ellipse ?

On note yQ la fonction du cercle y = (x) et yM la fonction de l'ellipse y = f(x).

Si on se contente du premier quadrant de la figure, on obtient.

Pour le cercle :

$$S = \int_0^a y_Q . dx = \frac{1}{4}\pi a^2$$

On n'a pas résolu l'intégrale, on suppose que la surface du cercle est connue.

Pour l'ellipse :

$$S = \int_0^a y_M . dx = \int_0^a \frac{b}{a} y_Q dx = \frac{b}{a}\int_0^a y_Q dx = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{4}\pi a^2\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\pi ab$$

La surface de l'ellipse est donc 4 fois plus grande, la relation a été démontrée.

Maintenant , démontrons la relation.

$$u - esinu = \frac{2\pi}{T}t$$

Il faut utiliser la loi des aires.

La loi des aires ne sera pas démontrée ici, elle s'appuie sur le fait que la force d'attraction est une force centrale, c'est-à-dire dirigée vers un point fixe dans un repère galiléen.

L'aire balayée pendant la période T (tour complet) vaut S = πab:

Ce qui fait une aire par unité de temps que l'on peut trouver facilement, en divisant la période T en n intervalles $\Delta$t, S est la surface de l'ellipse.

$$S = \frac{dS_1}{dt}\Delta t + \frac{dS_2}{dt}\Delta t + \cdots \frac{dS_n}{dt}\Delta t$$

Si les temps dt sont égaux, les dSi son égaux, on les note dS

$$S = n\frac{dS}{dt}\Delta t = \frac{dS}{dt}.T$$

$$\pi ab = \frac{dS}{dt}.T$$

La surface balayée par unité de temps vaut :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$$

La surface balayée au bout d'un temps t s'écrit.

$$S(t) = \frac{\pi ab}{T}t$$

Cette aire est celle qui est représentée en bleu sur la figure précédente, c'est encore la différence entre l'aire comprise entre l'arc MP et l'axe AP avec le triangle HMF.

On peut utiliser l'affinité pour trouver la surface HMPH, la surface HPQH est simple à trouver.

$$S_{HPQH} = \frac{1}{2}\left(\pi a^2 \frac{2u}{2\pi} - \frac{1}{2}(2QH.OH)\right)$$

Le terme ½ placé devant a été introduit car on ne veut que la partie supérieure de la surface totale.

Le terme entre parenthèse est la différence entre la surface d'un secteur angulaire et la surface du triangle d'angle 2u.

$$S_{HPQH} = \frac{1}{2}(a^2u - QH.OH)$$

$$S_{HPQH} = \frac{1}{2}(a^2u - QH.x)$$

La surface de la portion d'ellipse HPMH est proportionnelle à la portion de cercle HPQH suivant l'affinité que l'on a introduite.

$$S_{HPMH} = \frac{b}{a}S_{HPQH} = \frac{b}{2a}(a^2u - QH.x)$$

$$\frac{MH}{QH} = \frac{b}{a}$$

$$S_{HPMH} = \frac{b}{2a}\left(a^2u - \frac{a}{b}MH.x\right)$$

$$S_{HPMH} = \frac{b}{2a}\left(a^2u - \frac{a}{b}y.x\right)$$

$$S_{HPMH} = \frac{1}{2}(a.b.u - x.y)$$

Maintenant, on retire la surface du triangle HFMH.

$$S_{HFMH} = \frac{1}{2}(OF - OH)HM$$

On sait que OF = c, F étant la position du foyer.

$$S_{HFMH} = \frac{1}{2}(c - x)y$$

La surface balayée vaut :

$$S = S_{HPMH} - S_{HFMH}$$

$$S = \frac{1}{2}(a.b.u - x.y) - \frac{1}{2}(c - x)y$$

$$S = \frac{1}{2}(a.b.u - x.y - (c - x)y)$$

$$S = \frac{1}{2}(a.b.u - c.y)$$

En introduisant l'excentricité e = c/a

$$S = \frac{1}{2}(a.b.u - a.e.y)$$

En comparant avec le calcul de la surface balayée au bout d'un temps t.

$$S(t) = \frac{\pi ab}{T}t$$

$$\frac{1}{2}(a.b.u - a.e.y) = \frac{\pi ab}{T}t$$

$$a.b.u - a.e.y = \frac{2\pi ab}{T}t$$

$$u - \frac{1}{b}e.y = \frac{2\pi}{T}t$$

On introduit le terme sin(u).

$$sin(u) = \frac{QH}{OQ} = \frac{y_Q}{a} = \frac{(a/b)y}{a}$$

$$sin(u) = \frac{y}{b}$$

Ce qui fait :

$$u - e.sin(u) = \frac{2\pi}{T}t$$

On ne peut pas calculer l'angle u en fonction du temps car le mélange avec son sinus complique la recherche u = f(t).

Mais avec un logiciel de calcul, on peut calculer t = f(u) et construire un tableau à deux colonnes, et ainsi par lecture, avoir des correspondances pour d'après des valeurs de t.

Cette équation est sans doute la première équation transcendante de l'histoire, elle a été introduite par Kepler en 1609.

**CONCLUSION**

La forme paramétrique s'adapte bien à l'étude du mouvement des planètes, mais aussi d'autres objets célestes qui pourraient passer dans le champ de gravitation de la terre, car il est démontré que l'équation du mouvement est une conique, en fonction des conditions initiales sur la position initiale de l'objet, la trajectoire peut se refermer (ellipse) ou non.

Il faut retenir l'avantage de la formule en coordonnées polaire qui est commune aux trois courbes, en prenant la précaution de prendre pour origine du repère, un foyer.