DEFINITION DES

CONIQUES

PAR SES FOYERS

SOMMAIRE

I INTRODUCTION

Il y a plusieurs façons de définir une conique, tout d'abord on peut la définir par rapport au cône ou par rapport à une forme réduite, ou au contraire par rapport à une forme générale.

Le document « coniques » contient une étude très détaillée concernant le passage du cône à l'équation réduite qui est :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (ellipse) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (hyperbole) $y^2 = 2px$ (parabole)

Le document « équation générale des coniques » montre qu'à partir de l'équation réduite, on aboutit à une équation de la forme :

$ay^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Avec :

$b^2 - ac = 0$ (parabole)

$b^2 - ac > 0$ (hyperbole)

$b^2 - ac < 0$ (ellipse)

L'équation générale a pour avantage d'avoir la même forme pour les trois courbes, qui restent discernables en faisant l'opération $b^2 - ac$

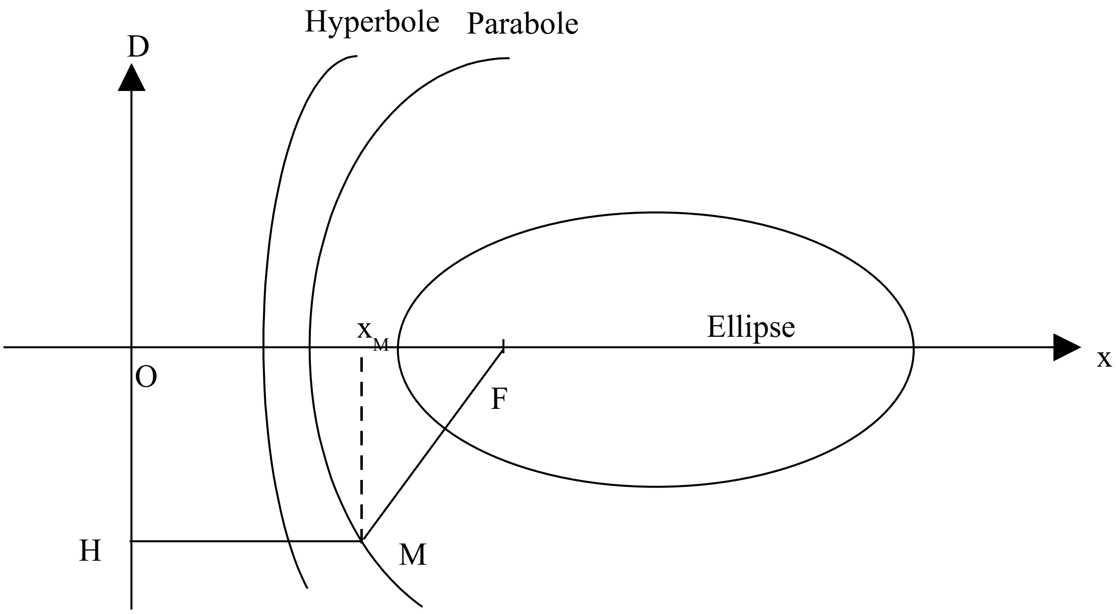
Nous allons, dans ce document, établir de nouvelles définitions en vérifiant si elles sont identiques à l'une des définitions précédentes.

Retour au sommaire

II DEFINITION MONOFOCALE

On appelle conique de droite directrice D, de foyer F et d'excentricité e, l'ensemble des points M vérifiant :

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = \frac{MF}{MH} = e$$



Rien n'empêche de placer la droite D, à l'origine des x, on a dans ce cas :

$$MF = \sqrt{OH^2 + (OF - x_M)^2}$$

On peut avoir x_M à droite de F, dans ce cas :

$$MF = \sqrt{OH^2 + (x_M - OF)^2}$$

De toute façon, en raison du carré, les deux relations sont identiques, on écrira simplement :

$$MF = \sqrt{{y_M}^2 + (x_M - OF)^2}$$

Sur la figure, le point M appartient à la parabole, mais ces relations sont aussi valables pour l'ellipse et pour l'hyperbole.

Enfin, MH = x_M

$$d(MF) = \sqrt{y^2 + (OF - x)^2}$$

$$d(MD) = |x|$$

Que l’on note aussi :

$$d(MD) = \sqrt{x^2}$$

Soit :

$$[d(MF)]^2 = y^2 + (OF - x^2)$$

$$[d(MD)]^2 = x^2$$

Puisque :

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = e$$

On obtient :

$$\frac{y^2 + (OF - x^2)}{x^2} = e^2$$

$y^2 + (OF^2 - x^2) = e^2x^2$

$y^2 + OF^2 + x^2 - 2OFx = e^2x^2$

$y^2 + x^2(1-e^2) - 2OFx + OF^2 = 0$

Pour reconnaître l’équation, il faut la réduire :

On décale l’origine pour éliminer le terme en facteur avec x.

Soit $x = X + xo$

Que l’on reporte dans l’équation précédente :

$y^2 + (X+xo)^2(1-e^2) - 2OF(X+xo) + OF^2 = 0$

$y^2 + X^2(1-e^2) + xo^2(1-e^2) + 2Xxo(1-e^2) – 2OF.X - 2OFxo + OF^2 = 0$

$y^2 + X^2(1-e^2) + xo^2(1-e^2) + 2X[xo(1-e^2) – OF] - 2OFxo + OF^2 = 0$

Le terme en facteur avec X s’annule pour $xo(1 – e^2) – OF = 0$ soit :

$$xo = \frac{OF}{1 - e^2}$$

L'équation devient :

$y^2 + X^2(1-e^2) + xo^2(1-e^2) - 2OFxo + OF^2 = 0$

$$y^2 + X^2\left(1-e^2\right) + \left(\frac{OF}{1-e^2}\right)^2\left(1-e^2\right) - 2OF\left(\frac{OF}{1-e^2}\right) + OF^2 = 0$$

$$y^2 + X^2\left(1-e^2\right) + OF^2 - 2\left(\frac{OF^2}{1-e^2}\right) + OF^2 = 0$$

$$y^2 + X^2\left(1-e^2\right) + 2OF^2\left(1-\frac{1}{1-e^2}\right) = 0$$

$$y^2 + X^2\left(1-e^2\right) - 2OF^2\frac{e^2}{1-e^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{1-e^2}} + \frac{X^2}{2OF^2\frac{e^2}{1-e^2}}\left(1-e^2\right) - 1 = 0$$

$$\frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{1-e^2}} + \frac{X^2}{2OF^2\frac{e^2}{\left(1-e^2\right)^2}} - 1 = 0$$

Si on adopte la nouvelle origine, on peut noter x pour l'abscisse.

$$\frac{x^2}{2OF^2\frac{e^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{1-e^2}} - 1 = 0$$

Cette équation n'est pas définie pour e = 1

En raison du carré, le dénominateur sous x^2 est toujours positif, que e soit inférieur à 1 ou qu'il soit supérieur.

Si e < 1 alors 1-e > 0

Dans ce cas la relation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Si e > 1 alors 1-e < 0, la relation se met sous la forme :

$$\frac{x^2}{2OF^2\frac{e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{e^2-1}} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

C'est une hyperbole.

Pour analyser le cas e = 1, il faut repartir à l'équation de base.

$y^2 + x^2(1-e^2) -2OFx + OF^2 = 0$

Qui se simplifie.

$y^2 -2OFx + OF^2 = 0$

En effectuant un autre décalage x_1 adéquat :

$x = X + x_1$

Que l'on reporte dans l'équation :

$y^2 -2OF(X + x_1) + OF^2 = 0$

$y^2 -2OFX -2OFx_1 + OF^2 = 0$

En faisant $x_1 = OF$, on obtient :

$y^2 =2OFX$

C'est la forme $y^2 = 2px$, il s'agit d'une parabole.

Pour résumer :

e = 1 (parabole)

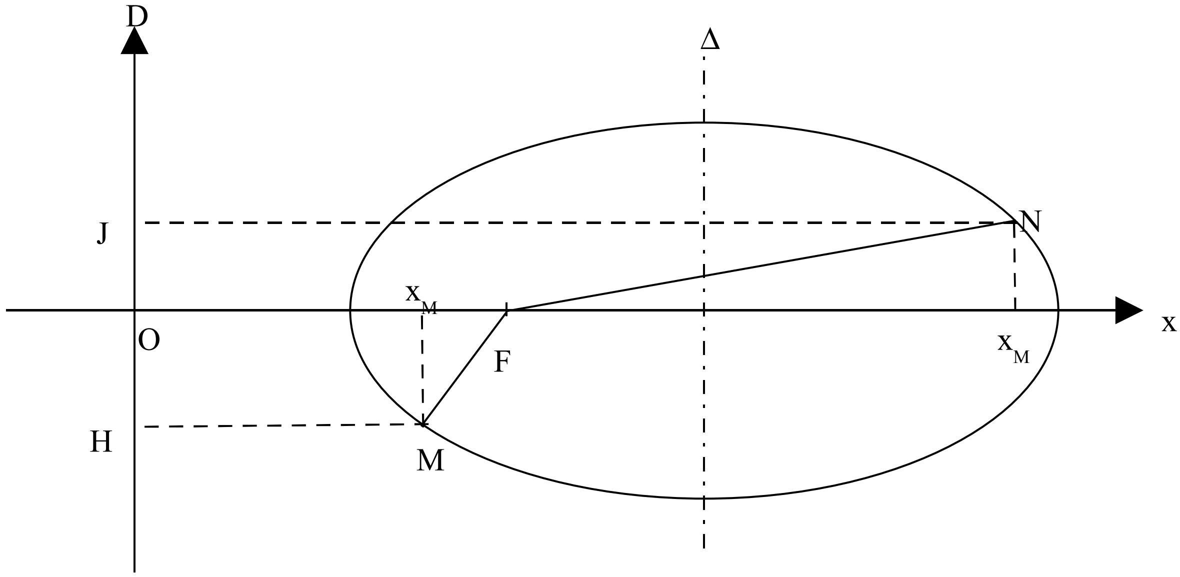
0 <e<1 (ellipse), voir plus loin le cas e = 0

e>1 (hyperbole)

Extension.

La parabole présente une symétrie par rapport à l'axe des x, et uniquement par rapport à cet axe, tandis que l'ellipse et l'hyperbole possède aussi une symétrie par rapport à l'axe des y ou tout au moins par un axe parallèle à y.

Cas de l'ellipse.



On rappelle :

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = \frac{MF}{MH} = e$$

Mais on a aussi :

$$\frac{d(NF)}{d(ND)} = \frac{NF}{NJ} = e$$

En effet cette relation a été posée comme définition, elle doit donc s'appliquer à tous les points, que ceux-ci soient à gauche de F, ou qu'ils soient à droite, c'est ce qu'il reste à vérifier.

On avait déjà évoqué le cas où x_M est à droite de F, quel que soit la conique, ce cas s'applique donc à l'ellipse, on avait vu que :

$$MF = \sqrt{{y_M}^2 + (OF - x_M)^2}$$

$$NF = \sqrt{{y_N}^2 + (x_N - OF)^2}$$

En raison du carré, les deux relations sont identiques, en effet :

$$NF = \sqrt{{y_N}^2 + (OF - x_N)^2}$$

On a aussi :

$$\left[d\left(ND\right)\right]^2 = x_N{}^2$$

On retrouve les mêmes relations pour le point N que pour le point M, dans ce cas, autant désigner tous les points par une lettre unique M, ce qui fait :

$MF = \sqrt{y^2 + \left(x - OF\right)^2}$ Et :

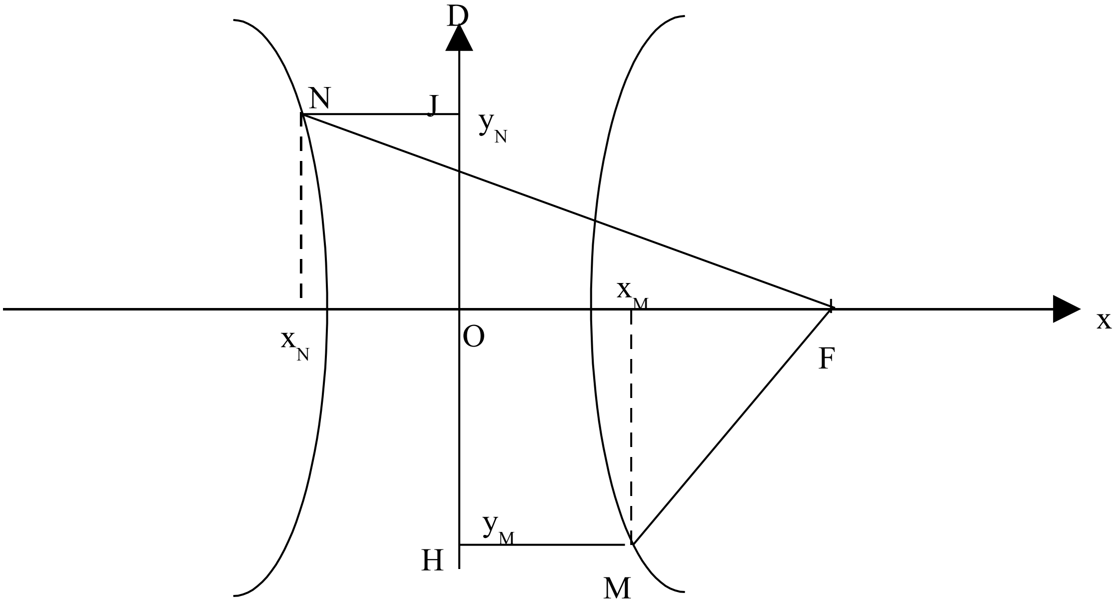
$ND = \sqrt{x_N{}^2}$ avec M à droite ou à gauche de F.

$$\frac{d\left(MF\right)}{d\left(MD\right)} = \frac{\sqrt{y^2 + \left(x - OF\right)^2}}{\sqrt{x^2}} = e$$

La validité de cette équation pour les point N, ne doit pas surprendre, puisqu'on a prouvé l'aboutissement à une équation réduite, caractéristique des coniques, on savait que cette définition d(MF)/d(MD) = e était suffisante.

Cas de l’hyperbole.

Une hyperbole présente une symétrie par rapport à une droite parallèle à l’axe y, voyons ce cas.



Cette fois-ci on a un point N dont l’abscisse x_N est négative.

$$NF = \sqrt{{y_N}^2 + (OF - x_N)^2}$$

En raison du carré, on peut écrire aussi :

$$NF = \sqrt{{y_N}^2 + (x_N - OF)^2}$$

$$[d(ND)]^2 = {x_N}^2$$

C’est la même relation que pour MF, on écrit simplement, un point de la courbe sera noté M qu’il soit à gauche ou à droite de F :

$MF = \sqrt{y^2 + (x - OF)^2}$ Et

$[d(MD)]^2 = x^2$ avec M à droite ou à gauche de F.

L’équation $\dfrac{d(MF)}{d(MD)} = \dfrac{MF}{MH} = e$

A montré que l’on aboutissait à une équation réduite, caractéristique d’une conique, donc comme pour l’ellipse, il est normal que cette définition s’applique à tous les points.

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = \frac{MF}{MH} = e$$

Retour au sommaire

III LES CONIQUES DEGENEREES

Si on se souvient qu'une conique est créée par l'intersection d'un plan avec un cône, on imagine sans peine des cas particuliers, comme par exemple un simple point si le plan passe par le sommet sans passer à l'intérieur.

Rappelons les équations propres aux trois types de courbe.

$$\frac{x^2}{2OF^2\frac{e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{1-e^2}}-1=0$$ Ellipse

$$\frac{x^2}{2OF^2\frac{e^2}{(1-e^2)^2}}-\frac{y^2}{2OF^2\frac{e^2}{e^2-1}}-1=0$$ Hyperbole

$y^2 = 2OFx$ Parabole

Premier cas : Le point F est sur la directrice D

Ce qui signifie OF = 0

On ne peut pas utiliser les équations réduites car elles ne sont pas définies pour OF = 0, on va donc partir de l'équation générale.

$y^2 + x^2(1-e^2) - 2OFx + OF^2 = 0$

Soit :

$y^2 + x^2(1-e^2) = 0$

$y^2 = x^2(e^2 - 1)$

On distingue 3 sous-cas :

e = 1, dans ce cas $y^2 = 0$, c'est l'axe des x.

e>1, dans ce cas $y^2 = k^2x^2$, soit y = kx et y = -kx, deux droites sécantes.

e<1, dans ce cas $y^2 = -k^2x^2$ n'a qu'une solution, y = 0 et x = 0

Deuxième cas : e = 0

Les formes réduites sont indéterminées, on repart de l'équation générale.

$y^2 + x^2(1-e^2) - 2OFx + OF^2 = 0$

$y^2 + x^2 - 2OFx + OF^2 = 0$

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = e = 0 \Rightarrow MF = 0$$

Ou encore :

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = \frac{\sqrt{y^2 + (x - OF)^2}}{\sqrt{x^2}} = e = 0 \Rightarrow x = OF \text{ et } y = 0$$

La courbe se réduit au point F.

Existe-t-il un cercle défini par foyer et directrice ?

La définition par foyer et directrice aboutit à une conique décalée sur l'axe des x.

Pour un cercle, on a :

$(x-xo)^2 + y^2 = R^2$

Soit :

$x^2 + y^2 + xo^2 - 2x.xo - R^2 = 0$

Ce qui ressemble à la forme :

$y^2 + x^2(1-e^2) - 2OFx + OF^2 = 0$, lorsque e = 0

Un cercle a donc une excentricité de 0

Mais pour e = 0, on a vu que y = 0 et x = OF

On était arrivé à ceci par :

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = e = 0 \Rightarrow MF = 0$$

Mais on pourrait aussi avoir MF $\neq$ 0 et MD = ∞

$$\frac{d(MF)}{d(MD)} = \frac{\sqrt{y^2 + (x - OF)^2}}{\sqrt{x^2}} = e$$

Quand e tend vers 0, x^2 tend vers ∞

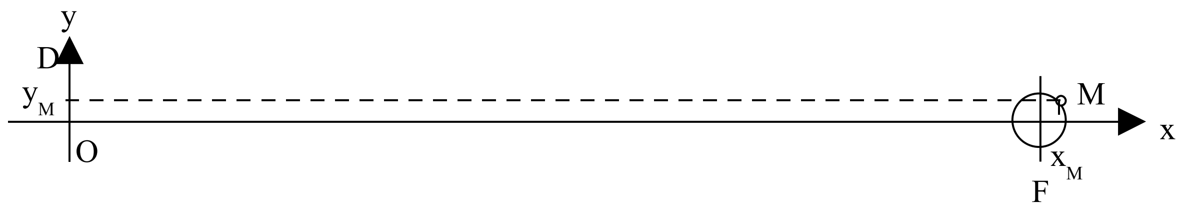
$y^2 + (x-OF^2) = e^2x^2$

x^2 est un nombre très grand, on peut lui attribuer la constante A, Ae^2 est le rayon du cercle.

Le centre est au point F.

Par contre y est fini, ainsi que x – OF.

Si x – OF est fini alors que x² est infini, cela signifie que OF est infini, le foyer et le point O sont à une distance infinie l'un de l'autre.



Retour au sommaire

IV DEFINITION BIFOCALE

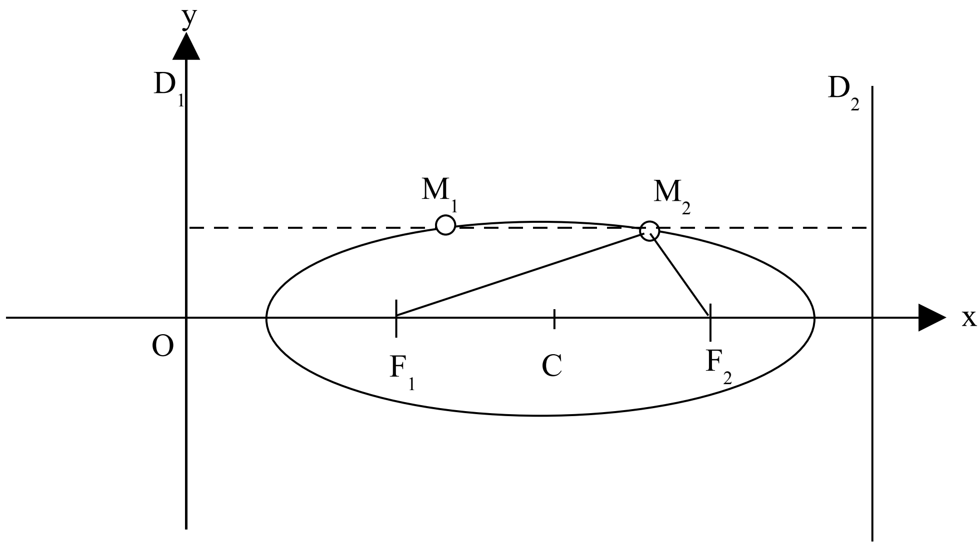
On a vu que l'on pouvait définir une conique à partir de son foyer et de sa droite directrice.

Mais existe t-il un seul foyer ? une seule directrice ?

La question se pose, car les coniques, mis à part la parabole, ont un axe de symétrie qui est parallèle à y.

Cas de l'ellipse

On imagine bien une deuxième directrice symétrique de la première par rapport au centre.



Soit M_1 et M_2 deux points symétriques par rapport à la droite d'équation x = OC

Par définition, on sait que :

$$\frac{MF_1}{d(MD_1)} = e$$

Cette définition s'applique à tous les points de l'ellipse.

Elle est donc valable pour les points M_1 et M_2

$$\frac{M_1F_1}{d(M_1D_1)} = \frac{M_2F_1}{d(M_2D_1)} = e$$

Puisque les points M_1 et M_2 sont symétriques, on a :

$M_1F_1 = M_2F_2$

La symétrie de D_2 par rapport à D_1 entraîne :

$d(M_1D_1) = d(M_2D_2)$

Ce qui fait :

$$\frac{M_1F_1}{d(M_1D_1)} = \frac{M_2F_2}{d(M_2D_2)} = e$$

Avec l'égalité :

$$\frac{M_1F_1}{d(M_1D_1)} = \frac{M_2F_1}{d(M_2D_1)} = e$$

On obtient :

$$\frac{M_2F_2}{d(M_2D_2)} = \frac{M_2F_1}{d(M_2D_1)} = e$$

$M_2F_2 = e.d(M_2D_2)$

$M_2F_1 = e.d(M_2D_1)$

Ce qui fait :

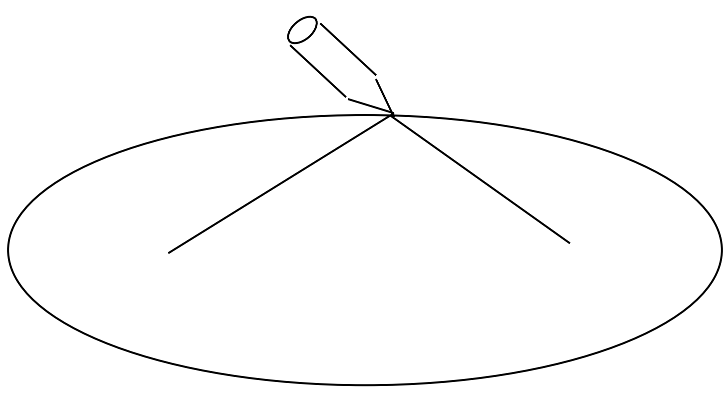
$M_2F_1 + M_2F_1 = e.d(M_2D_1) + e.d(M_2D_1) = ed(D_1D_2)$

Cette relation permet de donner une nouvelle définition à l'ellipese.

Une ellipse est une courbe dont la somme des distances des points aux deux foyers est constante.

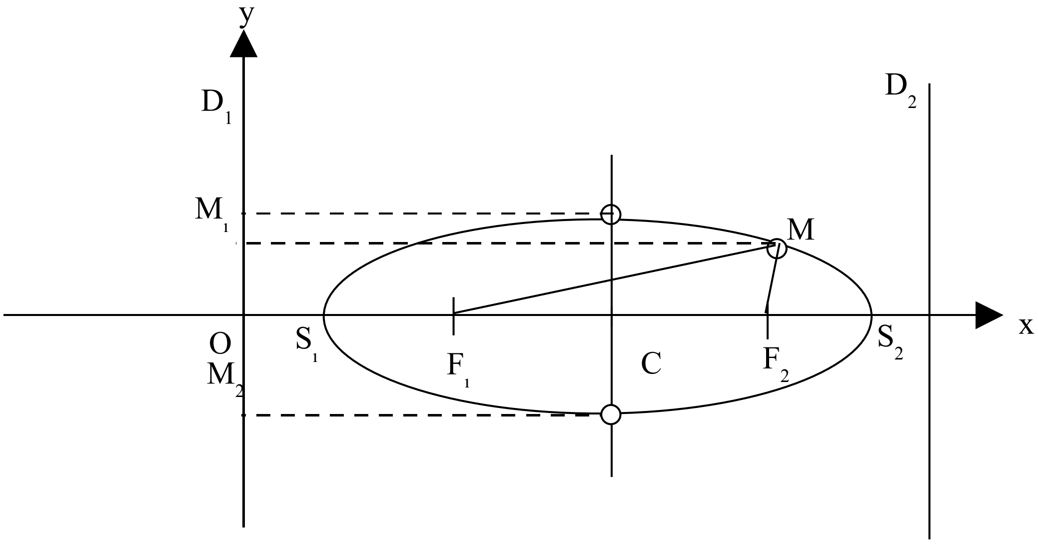
On peut donc tracer une ellipse à l'aide d'une ficelle non tendue dont les extrémités sont aux deux foyer.

Avec un crayon, on tend la ficelle et on fait le tour.



POINTS REMARQUABLES DE L'ELLIPSE

Il serait intéressant de noter la longueur de fil nécessaire ainsi que la distance entre les deux foyers.



On rappelle l'équation par rapport à F_1 et à D_1

$$\frac{MF_1}{d(MD_1)} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x - OF_1)^2 + y^2}}{x} = e$$

$(x – OF_1)^2 + y^2 = e^2x^2$

$x^2 + OF_1^2 -2xOF_1 + y^2 - ex^2 = 0$

$x^2(1-e^2) + OF_1^2 -2xOF_1 + y^2 = 0$

Recherche des sommets S_1 et S_2

Pour les sommets, y = 0, l'équation devient :

$x^2(1-e^2) + OF_1^2 -2xOF_1 = 0$

$$x_1 = \frac{2OF_1 - \sqrt{4OF_1^2 - 4(1 - e^2)OF_1^2}}{2(1 - e^2)}$$

$$x_1 = \frac{2OF_1 - \sqrt{4e^2 OF_1{}^2}}{2(1-e^2)}$$

$$x_1 = \frac{2OF_1 - 2eOF_1}{2(1-e^2)}$$

$$x_1 = \frac{OF_1(1-e)}{(1-e^2)}$$

$$x_1 = \frac{OF_1}{1+e} = OS_1$$

$$x_2 = \frac{2OF_1 + \sqrt{4OF_1{}^2 - 4(1-e^2)OF_1{}^2}}{2(1-e^2)}$$

$$x_2 = \frac{2OF_1 + \sqrt{4e^2 OF_1{}^2}}{2(1-e^2)}$$

$$x_2 = \frac{2OF_1 + 2eOF_1}{2(1-e^2)}$$

$$x_2 = \frac{OF_1(1+e)}{(1-e^2)}$$

$$x_2 = \frac{OF_1}{1-e} = OS_2$$

Valeur du grand axe de l'ellipse.

$a = OS_2 - OS_1$

$$a = \frac{OF_1(1+e)}{(1-e^2)} - \frac{OF_1(1-e)}{(1-e^2)}$$

$$a = 2OF_1 \frac{e}{(1-e^2)}$$

Autre valeur remarquable, le petit axe.

On détermine OB_1 et OB_2, point y où x = x_C

$$x_C = \frac{OS_1 + OS_2}{2}$$

On rappelle :

$$OS_1 = \frac{OF_1}{1+e}$$

$$OS_2 = \frac{OF_1}{1-e}$$

$$x_C = \frac{\frac{OF_1}{1+e} + \frac{OF_1}{1-e}}{2}$$

$$x_C = \frac{1}{2} OF_1 \frac{(1-e)+(1+e)}{1-e^2}$$

$$x_C = \frac{OF_1}{1-e^2}$$

On rappelle l'équation :

$x^2(1-e^2) + OF_1^2 - 2xOF_1 + y^2 = 0$

$$\left(\frac{OF_1}{1-e^2}\right)^2 (1-e^2) + OF_1^2 - 2\frac{OF_1}{1-e^2} OF_1 + y^2 = 0$$

$$\frac{OF_1^2}{1-e^2} + OF_1^2 - 2\frac{OF_1}{1-e^2} OF_1 + y^2 = 0$$

$$-\frac{OF_1^2}{1-e^2} + OF_1^2 + y^2 = 0$$

$$OF_1^2 \frac{-1+(1-e^2)}{1-e^2} + y^2 = 0$$

$$y^2 = OF_1^{\,2}\frac{e^2}{1-e^2}$$

$$y_1 = OF_1\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

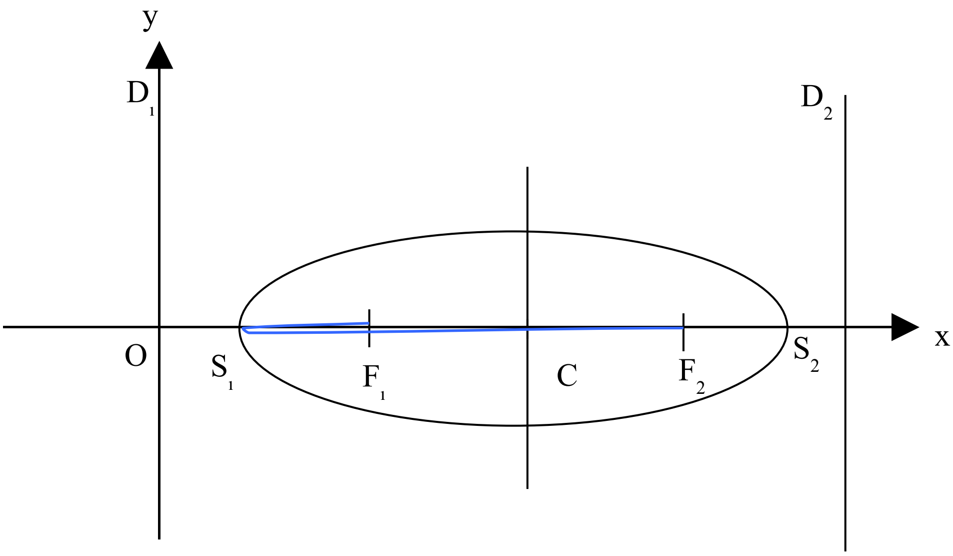
$$y_2 = -OF_1\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

Valeur du petit axe:

$$b = y_1 - y_2 = 2OF_1\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

Longueur de la ficelle :

Le crayon est en S_1



$L = F_1S_1 + S_1F_2$

$L = F_1S_1 + S_1F_1 + F_1F_2$

$L = F_1S_1 + F_2S_2 + F_1F_2$

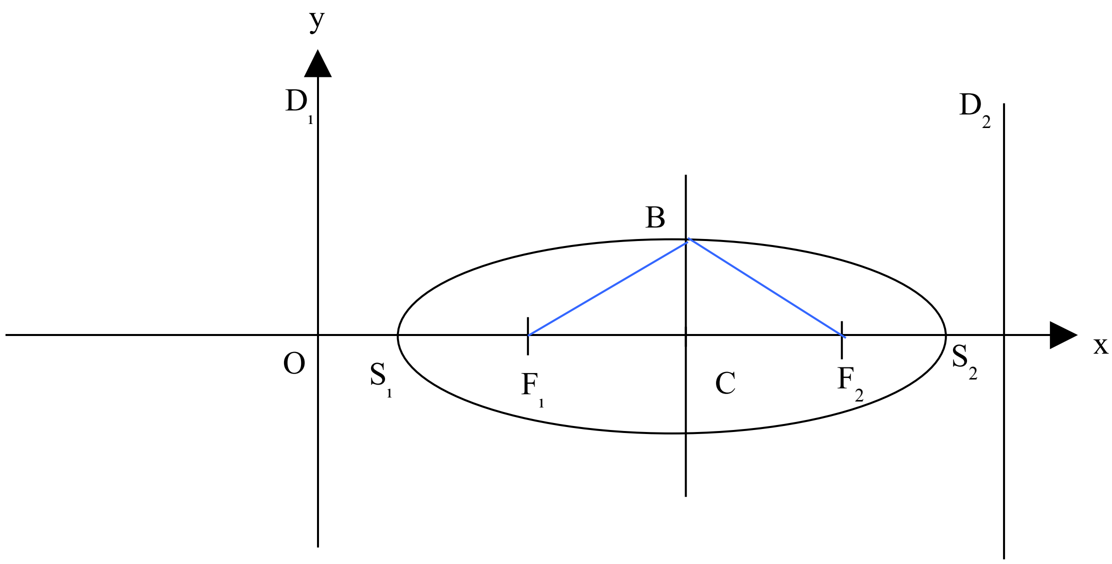
L = a, valeur du grand axe.

Valeur de OF_1

$OF_1 = OC - F_1C$

$$OC = x_C = \frac{OF_1}{1-e^2}$$

On calcule F_1C quand le crayon est à y_{Max}



$F_1C^2 + BC^2 = F_1B^2$

F_1B = moitié de la longueur de ficelle = $a/2 = OF_1 \dfrac{e}{(1-e^2)}$

$BC = Y_{Max} = OF_1 \dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}$

$$\left[OF_1 \frac{e}{(1-e^2)}\right]^2 = F_1C^2 + OF_1{}^2 \frac{e^2}{1-e^2}$$

$$OF_1{}^2 \frac{e^2}{(1-e^2)^2} - OF_1{}^2 \frac{e^2}{1-e^2} = F_1C^2$$

$$OF_1{}^2 \frac{e^2-(1-e^2)}{(1-e^2)^2} = F_1C^2$$

$$OF_1{}^2 \frac{2e^2-1}{(1-e^2)^2} = F_1C^2$$

Cette relation permet de passer de OF_1 à F_1C
Avec la relation ci-dessous :

$$OS_1 = \frac{OF_1}{1+e}$$

Il s'avère que le choix CF_1 suffit à définir l'ellipse, car F_1C définit OF_1 qui à son tour définit la valeur des axes et le centre.

$$a = 2OF_1\frac{e}{(1-e^2)}$$

$$b = 2OF_1\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$x_C = \frac{OF_1}{1-e^2}$$

En fait, on ne peut pas trouver des relations qui ne soient fonction que de e, d'une part parce que e est un nombre pur et que les autres grandeurs sont des longueurs, et d'autre part, il existe une infinité d'ellipses qui ne diffèrent que par leur taille.

Distance entre les droites.

Puisque D_1 est à l'origine.

$D_1D_2 = OS_2 + S_2D_2$

$S_2D_2 = OS_1$

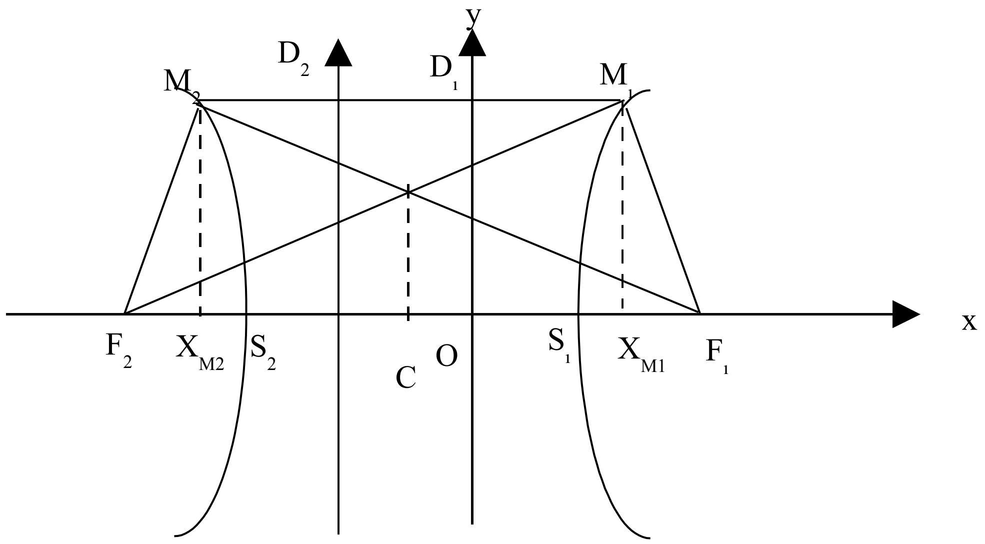
$D_1D_2 = OS_1 + OS_2$

$$D_1D_2 = \frac{OF_1}{1+e} + \frac{OF_1}{1-e}$$

$$D_1D_2 = 2\frac{OF_1}{1-e^2}$$

Cette fois-ci nous avons tous les paramètres de l'ellipse.

Cas de l'hyperbole.



Comme pour l'ellipse, on définit une deuxième directrice et un deuxième foyer.

Le centre de l'hyperbole n'est pas au point O, sauf pour l'équation réduite, ce qui n'est pas le cas ici.

$$\frac{M_1F_1}{M_1D_1} = e$$

$$\frac{M_2F_1}{M_2D_1} = e$$

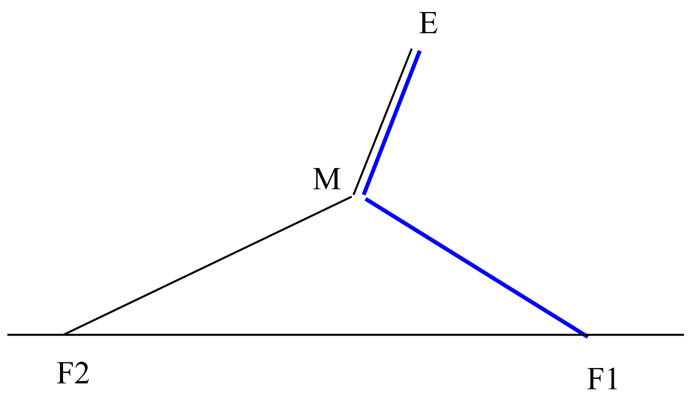
$M_1F_1 = eM_1D_1$

$M_2F_1 = eM_2D_1$

$M_2F_1 - M_1F_1 = eM_2D_1 - eM_1D_1$

$M_2F_1 - M_1F_1 = eD_1D_2 = cste$

Dessin de l'hyperbole.



Soit deux ficelles, une bleue dont les extrémités sont F1 et E, une noire d'extrémités F2 et E.

Soit M, un point quelconque de la courbe.

$F_2M - F_1M = (F_2M+ME) - (F_1M+ME) = L_2 - L_1$

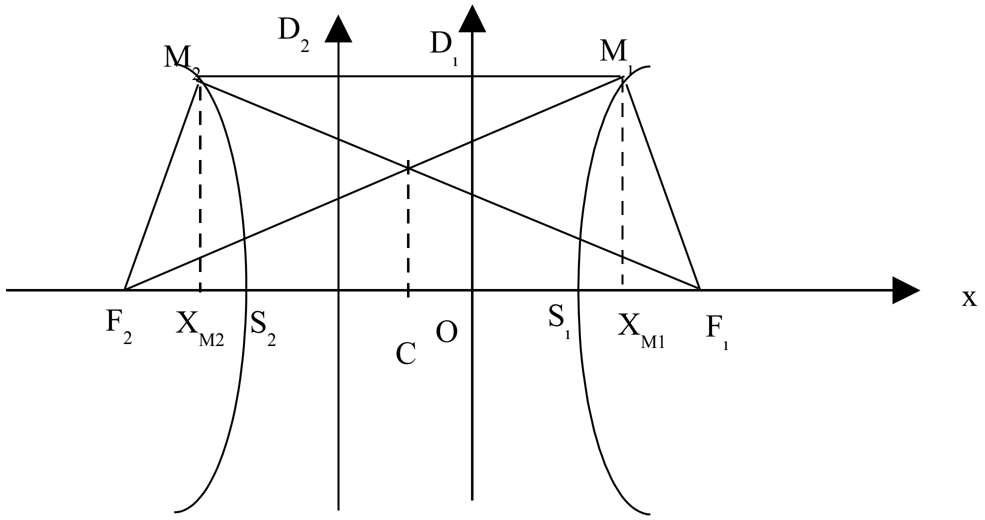
La différence de longueur entre les deux ficelles est bien une constante, ce qui répond à la définition.

Il suffit que la différence fasse eD_1D_2.

POINTS REMARQUABLES DE L'HYPERBOLE

On peut déterminer la position des sommets, des foyers et des directrices.

Comme pour l'ellipse, il suffit de choisir un paramètre et de déterminer les autres par rapport à celui-ci.



L'équation est la suivante.

$$\frac{MF_1}{MD_1} = e$$

Soit pour x>0, demi hyperbole de droite.

$$\frac{MF_1}{MD_1} = \frac{\sqrt{(OF_1 - x)^2 + y^2}}{x} = e$$

$(OF_1-x)^2 + y^2 = e^2x^2$

$OF_1^2 + x^2 - 2OF_1x + y^2 = e^2x^2$

$x^2(1-e^2) + y^2 - 2OF_1x + OF_1^2 = 0$

Elle s'applique à tous les points de la courbe, ce qui fait pour les sommets :

$$\frac{S_1F_1}{S_1D_1} = e$$

On détermine OS_1, qui correspond à x quand y = 0

$x^2(1-e^2) - 2OF_1x + OF_1^2 = 0$

$$x = \frac{2OF_1 \pm \sqrt{4OF_1{}^2 - 4\left(1-e^2\right)OF_1{}^2}}{2\left(1-e^2\right)}$$

$$x = \frac{2OF_1 \pm 2eOF_1}{2\left(1-e^2\right)}$$

$$x = \frac{OF_1\left(1 \pm e\right)}{\left(1-e^2\right)}$$

On garde la valeur positive qui correspond au sommet S_1, comme e>1

$$x_1 = \frac{OF_1\left(1-e\right)}{\left(1-e^2\right)}$$

$$x_1 = \frac{OF_1}{\left(1+e\right)}$$

$$OS_1 = \frac{OF_1}{\left(1+e\right)}$$

Recherche du deuxième sommet.

L'équation ne change pas :

$$\frac{MF_1}{MD_1} = e$$

Soit pour x<0, demi hyperbole de gauche.

$$\frac{MF_1}{MD_1} = \frac{\sqrt{\left(OF_1 + |x|\right)^2 + y^2}}{|x|} = \frac{\sqrt{\left(OF_1 - x\right)^2 + y^2}}{-x} = e$$

$(OF_1-x)^2 + y^2 = e^2x^2$

On retrouve la même expression que pour la recherche du sommet S_1, on doit aboutir à la même relation finale.

$$x = \frac{OF_1\left(1 \pm e\right)}{\left(1-e^2\right)}$$

Cette foi-ci, on garde la valeur négative qui correspond au sommet S_2, comme e>1

$$x_2 = \frac{OF_1(1+e)}{(1-e^2)}$$

$$x_2 = \frac{OF_1}{(1-e)}$$

$$OS_2 = \frac{OF_1}{|1-e|} = \frac{OF_1}{e-1}$$

Position du centre C

$$x_C = \frac{OS_1 - OS_2}{2}$$

$$x_C = \frac{\frac{OF_1}{e+1} - \frac{OF_1}{e-1}}{2}$$

$$x_C = \frac{OF_1(e-1) - OF_1(e+1)}{2(e^2-1)}$$

$$x_C = \frac{OF_1(e-1) - OF_1(e+1)}{2(e^2-1)}$$

$$x_C = \frac{-2OF_1}{2(e^2-1)}$$

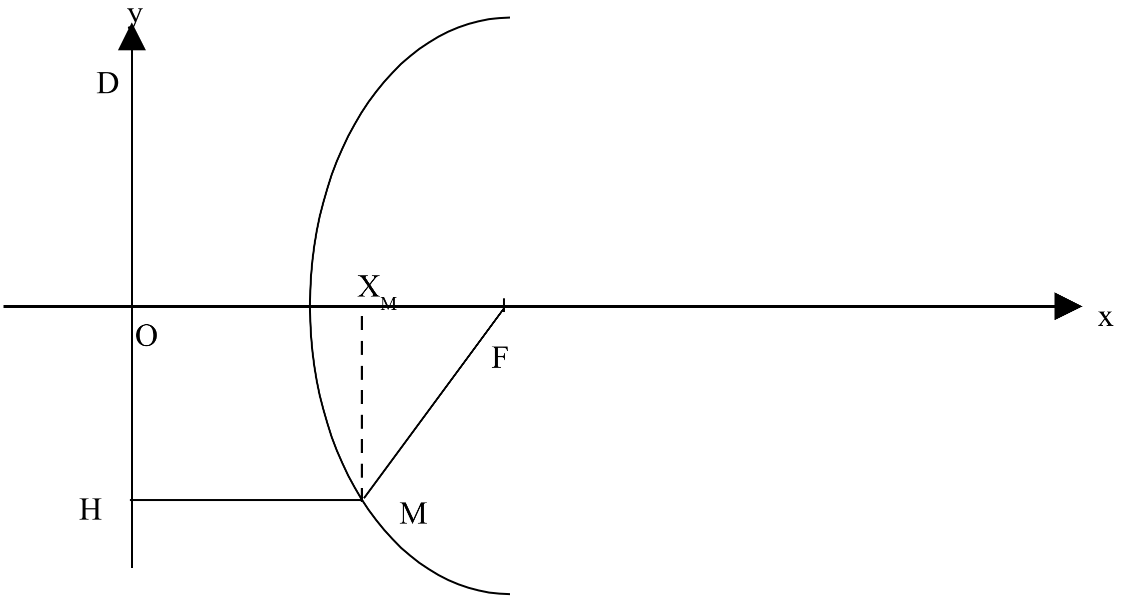
$$x_C = \frac{OF_1}{(1-e^2)}$$

On voit que $x_C<0$

Il ne reste plus que OF_1 mais on ne peut pas tout calculer, il faut bien choisir un paramètre, e suffit pour définir la forme de la courbe mais pas sa taille, d'ailleurs e est sans dimension.

Quand à OF_2 ce n'est pas très difficile, par symétrie on a $S_1F_1 = S_2F_2 = OF_1 – OS_1$

Cas de la parabole.

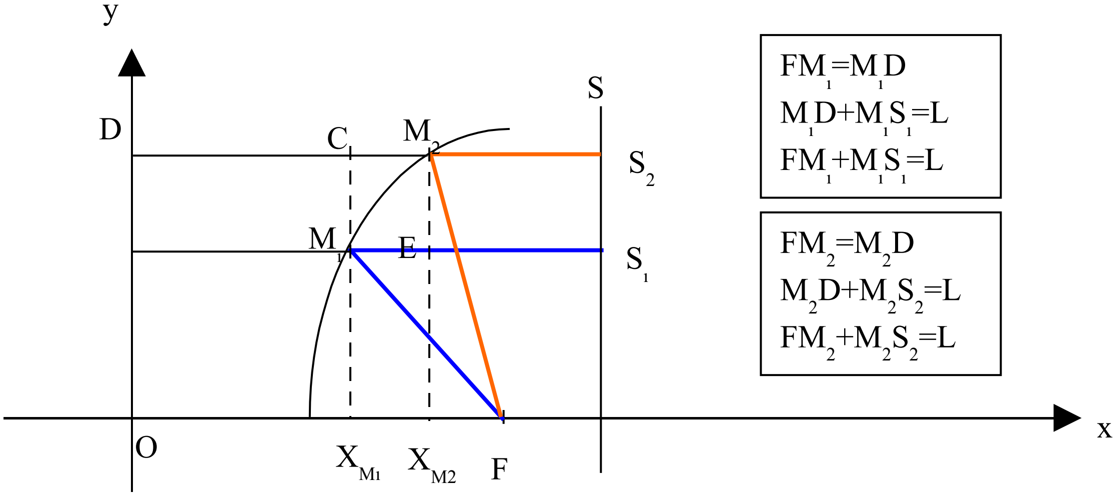


Il n'y pas de symétrie par rapport à une droite qui soit parallèle à l'axe y, par conséquent on ne peut pas définir une deuxième directrice, ni un deuxième foyer.

Mais cela ne veut pas dire que l'on ne peut pas tracer la courbe avec un crayon et une ficelle, recherchons le moyen.

$$\frac{MF}{d(MD)} = e = 1 \text{ pour la parabole}$$

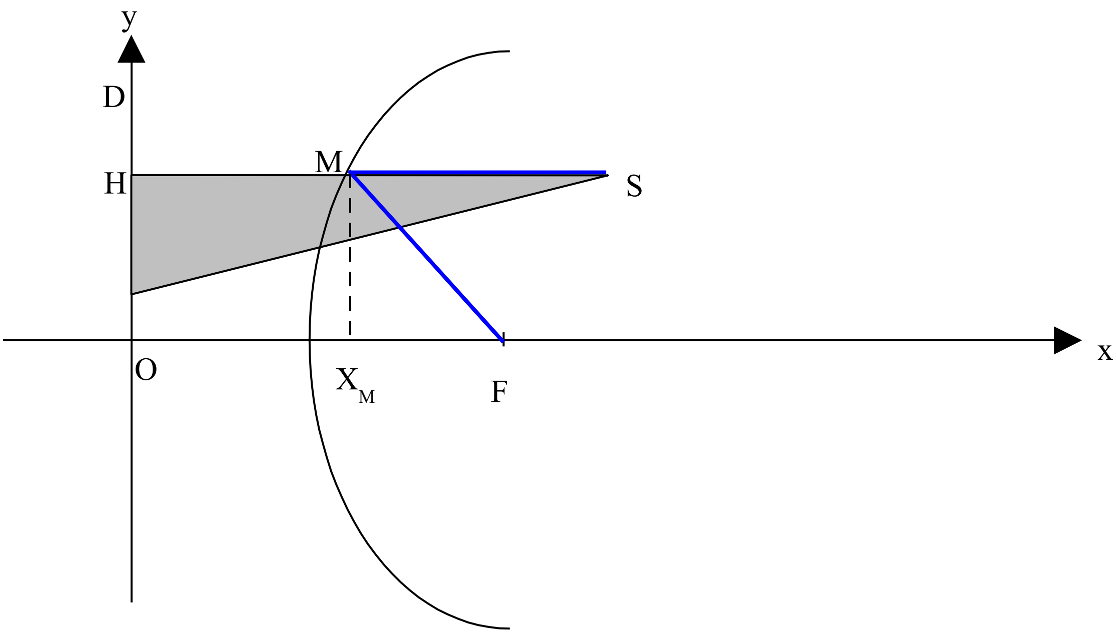
Ce qui fait MF = x, quand on se déplace d'un point M_1 à un point M_2 on se déplace sur l'axe des x d'une valeur $M_2F - M_1F$, si on prend un bout de ficelle de longueur constante, la partie entre F et M s'étant allongée de ΔL, en passant de M_1 à M_2, il faut donc que la partie restante soit raccourcie de la même valeur, nous suggérons une droite parallèle à l'axe y et suffisamment loin derrière F pour tracer une grande portion de la parabole.



On écrit simplement :

FM + MS = L (longueur de la ficelle).

Il suffit, pour tracer la courbe de faire glisser une équerre sur l'axe y en la maintenant tendue, comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Une extrémité de la ficelle se trouve sur F et l'autre extrémité sur l'extrémité de l'équerre.



Retour au sommaire

V L'ANTENNE PARABOLIQUE

Qu'est-ce qu'une antenne parabolique a à voir avec une conique ?

Et bien si ça a à voir, car si elle se nomme ainsi c'est parce qu'il s'agit d'une paraboloïde.

Une paraboloïde est engendrée par une parabole en rotation sur l'axe de symétrie.

Pourquoi les antennes satellites ont-elles la forme d'une parabole ?

La réponse est que l'on exploite une propriété qui n'a pas été développée dans ce document mais qui va être traité maintenant.

Enoncé de la propriété :

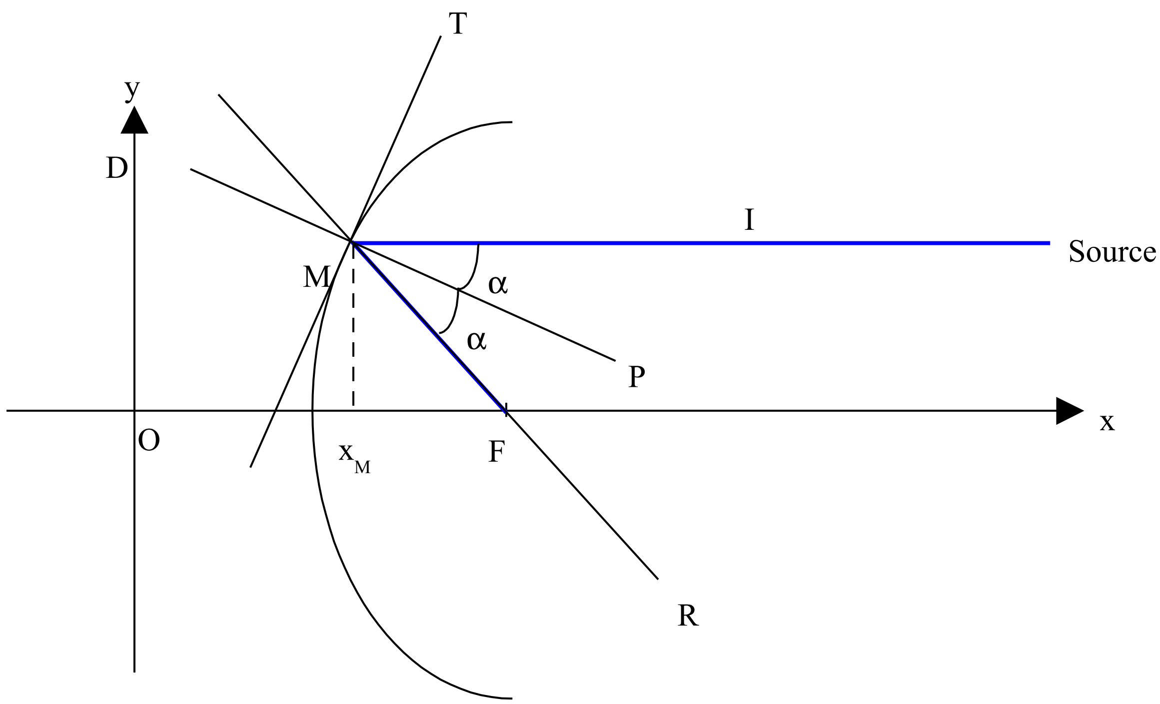
Une parabole qui reçoit un faisceau parallèle à l'axe de symétrie, réfléchit tout le faisceau en un seul point qui n'est autre que le foyer de la parabole.

N comprend l'intérêt d'utiliser une forme parabolique pour capter une émission de télévision par satellite.

Un satellite géostationnaire se situe à 36000 km de la parabole, autant considérer que les rayons qui frappent la parabole sont parallèles ;

Il suffit de placer la tête de réception au foyer de la parabole, pour capter les émission.

<u>Démonstration</u>.



$$\frac{MF}{d(MD)} = e$$

Soient :

I, la droite parallèle aux rayons incidents et venant frapper la parabole au point M.
T, la droite tangente à la courbe et passant par le point M
P, la perpendiculaire à T, et passant par le point M.
R, la droite passant par le rayon réfléchit issu du point M.

D'après la figure, on voit que la droite coupe l'axe Ox en F, mais il faut le prouver.

Equation de la courbe.

$$\frac{MF}{MD} = 1$$

On utilisera les appellations x_C et y_C plutôt que x et y, car nous allons mettre en équation les droites et la courbe, mis à part le point M, aucun point n'appartient à la fois aux droites et à la courbe, il faut bien faire la distinction.

$$\frac{\sqrt{(OF - x_C)^2 + y_C{}^2}}{x_C} = 1$$

Soit :

$OF^2 + x_C{}^2 - 2Ofx_C + y_C{}^2 = x_C{}^2$

$OF^2 - 2OFx_C + y_C{}^2 = 0$

$y_C{}^2 = 2OFx_C - OF^2$

On obtient la pente de la tangente (T) que l'on note a_T à la courbe par :

$2y_C dy = 2OFdx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{OF}{y_C} = a_T$$

Nous obtenons de ce fait la pente de la perpendiculaire à la tangente (P) que l'on note a_P , le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut – 1, ce qui fait :

$a_P = -y_C/OF$

Soit $a_P = -y_C/OF = -tg\alpha$ (car on prend α comme positif).

On peut calculer la pente de la droite R que l'on note a_R qui fait un angle 2α par rapport au rayon incident.

$$a_R = -tg(2\alpha) = -\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$a_R = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$$

$$a_R = \frac{2\frac{y_C}{OF}}{\frac{y_C{}^2}{OF^2} - 1}$$

$$a_R = \frac{2y_C OF}{y_C{}^2 - OF^2}$$

Equation de la droite :

On connaît la pente a_R, On cherche l'ordonnée à l'origine b_R.

$b_R = y_R - a_R x_R$

Le couple x_R y_R connu est celui qui correspond au point M qui appartient à la courbe et à la droite R.

$b_R = y_M - a_R x_M$

Soit :

$$b_R = y_M - \frac{2y_M OF}{y_M{}^2 - OF^2} x_M$$

L'équation de la droite est :

$y_R = a_R x_R + b_R$

$$y_R = \frac{2y_M OF}{y_M{}^2 - OF^2} x_R + y_M - \frac{2y_M OF}{y_M{}^2 - OF^2} x_M$$

En appliquant au point M, l'équation de la courbe, on obtient :

$$y_R = \frac{2y_C OF}{y_C{}^2 - OF^2} x_R + y_M - \frac{2y_C OF}{y_C{}^2 - OF^2} x_C$$

Déterminons x_r, tel que $y_R = 0$ afin de savoir si la droite coupe l'axe des x au point F.

$$0 = \frac{2y_C OF}{y_C{}^2 - OF^2} x_R + y_M - \frac{2y_C OF}{y_C{}^2 - OF^2} x_C$$

$2y_C OF x_R + y_M(y_C{}^2 - OF^2) - 2y_C OF x_C = 0$

Or :

$Y_C^2 = 2OFx_C - OF^2$

Ce qui fait :

$2y_COFx_R + y_C(2OFx_C - 2OF^2) - 2y_COFx_C = 0$

$2y_COFx_R - 2OF^2y_C = 0$

$2y_COF(x_R - OF) = 0$

La valeur OF n'est pas nulle, si y_C est nul, cela signifie que le rayon incident frappe la parabole au centre, dans ce cas le rayon repart en arrière, et dans le cas où $y_C \neq 0$ on obtient :

$x_R - OF = 0$

$x_R = OF$, la démonstration est faite, tout rayon frappant la parabole parallèlement à l'axe des x, se reflète au point F.

Cette propriété n'avait pas été exposé dans ce document, ni dans le document qui définit les coniques à partir du cône ni dans celui qui traite des équations générales des coniques.

CONCLUSION

Ce document est assez riche en propriétés sur les coniques, car la définition par foyer et excentricité est utilisée dans tous les ouvrages d'astronomie.

D'autre part, il traite du traçage des trois coniques à l'aide d'un crayon et d'une ficelle, ce qui peut être sympa pour faire du dessin manuel.

Enfin, l'application pratique comme l'usage de la parabole pour la télévision est un plus dans l'étude des coniques.

Retour au sommaire