

LES CONIQUES

Du grec kônikos, de kônos, cône.

Equation cartésienne.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

A b c non tous nuls.

Les directions asymptotiques ont pour coefficients directeurs les solutions m de l'équation $cm^2 + 2bm + a = 0$

$-b^2 - ac > 0$ la courbe a deux directions asymptotiques distinctes : c'est une hyperbole si elle n'est pas constituée de deux droites sécantes.

$-b^2 - ac = 0$ la courbe deux directions asymptotiques confondues, c'est une parabole si elle n'est pas composée de deux droites parallèles.

$-b^2 - ac < 0$ la courbe n'a pas de branches infinies, c'est une ellipse si ce n'est pas l'ensemble vide.

Le centre de symétrie n'existe que pour les ellipses et les hyperboles ($b^2 - ac \neq 0$) d est donné par les équations :

$$ax + by + d = 0$$

et $bx + cy + e = 0$

Equations réduites.

Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dont les asymptotes ont pour équation :

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Parabole

$$y^2 = 2px$$

Equation paramétrique.

Ellipse.

$$x = a \cos \phi$$

$$y = b \sin \phi$$

$$\phi \in]-\pi \pi[$$

Hyperbole.

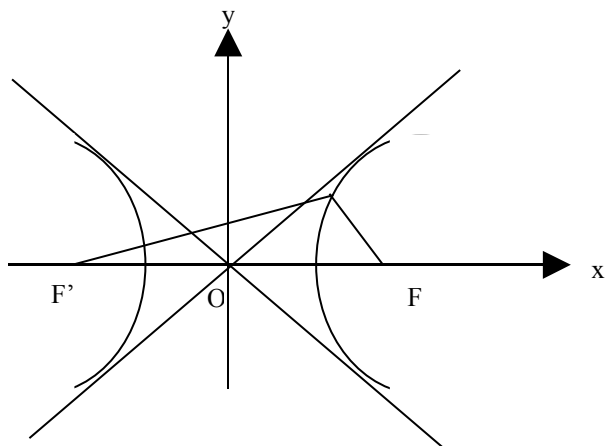
$$x = a \operatorname{ch} \phi$$

$$y = b \operatorname{sh} \phi$$

$$\phi \in \mathbb{R}$$

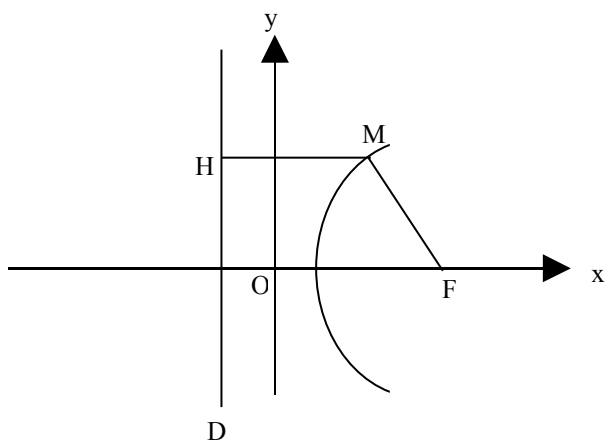
En prenant comme axe ses asymptotes, l'hyperbole a une équation de la forme $XY=k$ et réciproquement.

Hyperbole.



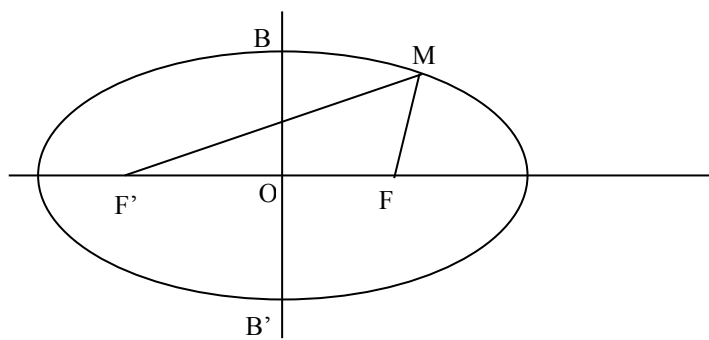
$$|MF - MF'| = 2a$$

Parabole.



$$MH = MF$$

Ellipse.

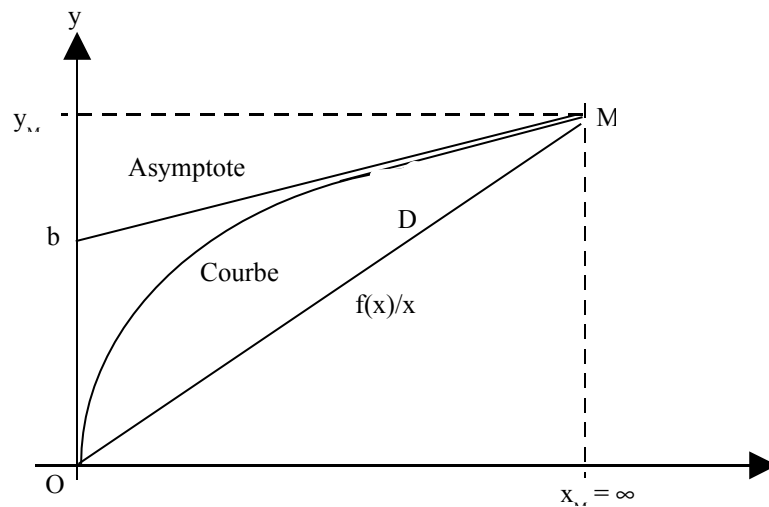


$$MF + MF' = 2a$$

$$OB = OB' = b$$

COMMENTAIRES

ASYMPTOTES



L'asymptote est la droite qui « suit » la courbe lorsque x tend vers l'infini.

La pente est égale à la dérivée de la fonction à $x = \infty$

Mais si x est infini, b devient négligeable devant x , la pente de l'asymptote tend vers $f(x)/x$.

Droite D :

$$\text{Pente} = y_M / x_M$$

Asymptote :

$$\text{Pente} = f'(x_M) = (y_M - b)/x_M$$

Si y_M et b ont des valeurs finies alors, la pente est nulle, en effet l'asymptote est horizontale ;

Si y_M est infini et b fini, alors $y_M - b$ tend vers y_M et dans ce cas on a bien :

$$f'(x_M) = y_M / x_M$$

Cette relation a pour avantage d'éviter à calculer la dérivée.

ASYMPTOTE DES CONIQUES

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

$$cy^2 + y(2bx + e) + ax^2 + dx + f = 0$$

$$y = \frac{-(2bx+e) \pm \sqrt{(2bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)}}{2c}$$

Que l'on écrit sous forme littérale pour le calcul de la dérivée.

$$y = -(2bx+e)/2c \pm (1/2c) \{(2bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)\}^{1/2}$$

Dérivée

$$y' = -b/c \pm (1/2c) (1/2) \{(2bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)\}^{-1/2} \{2(2bx+e)2b - 4c(2ax+d)\}$$

Que l'on écrit sous forme mathématique, pour les opérations de simplification.

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{4b(2bx+e) - 4c(2ax+d)}{4c\sqrt{(2bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)}}$$

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{b(2bx+e) - c(2ax+d)}{c\sqrt{(2bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)}}$$

En l'infini on obtient:

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{b(2bx) - c(2ax)}{c\sqrt{(2bx)^2 - 4c(ax^2+dx)}}$$

Les termes en x sont négligeables par rapport à ceux en x²
(EX : 1000 par rapport à 1000 000)

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{b(2bx) - c(2ax)}{c\sqrt{(2bx)^2 - 4c(ax^2)}}$$

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{2b^2x - 2acx}{c\sqrt{4b^2x^2 - 4cax^2}}$$

$$y' = \frac{-b}{c} \pm \frac{b^2 - ac}{c\sqrt{b^2 - ca}}$$

$$y' = -\frac{b}{c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ca}}{c}$$

Calcul de $f(x)/x$

$$y = \frac{-(2bx + e) \pm \sqrt{(2bx + e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-(2b + \frac{e}{x}) \pm \frac{1}{x} \sqrt{(2bx + e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-(2b + \frac{e}{x}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)(2bx + e)^2 - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-(2b + \frac{e}{x}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)(4b^2x^2 + e^2 + 4bx e) - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

En $x = \infty$

$$\lim \left(\frac{y}{x} \right)_{x \rightarrow \infty} = \frac{-(2b) \pm \sqrt{(4b^2) - 4c(a)}}{2c}$$

$$= \frac{-(2b) \pm 2\sqrt{b^2 - ca}}{2c} = -\frac{b}{c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ca}}{c}$$

On retrouve la même expression que dans le calcul de la dérivée, on a utilisé les deux méthodes dans le but d'illustrer par un exemple ce qui a été énoncé en début de paragraphe sur les asymptotes.

Soit m la pente.

$$m = -\frac{b}{c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ca}}{c}$$

$$mc = -b \pm (b^2 - ca)^{1/2}$$

$$(mc + b)^2 = (b^2 - ca)$$

$$m^2c^2 + b^2 + 2mcb = b^2 - ca$$

$$m^2c^2 + 2mcb + ca = 0$$

$$m^2c + 2mb + a = 0$$

Voir en première page, le Larousse donne bien l'expression ci-dessous qui est la même.

$$cm^2 + 2bm + a = 0$$