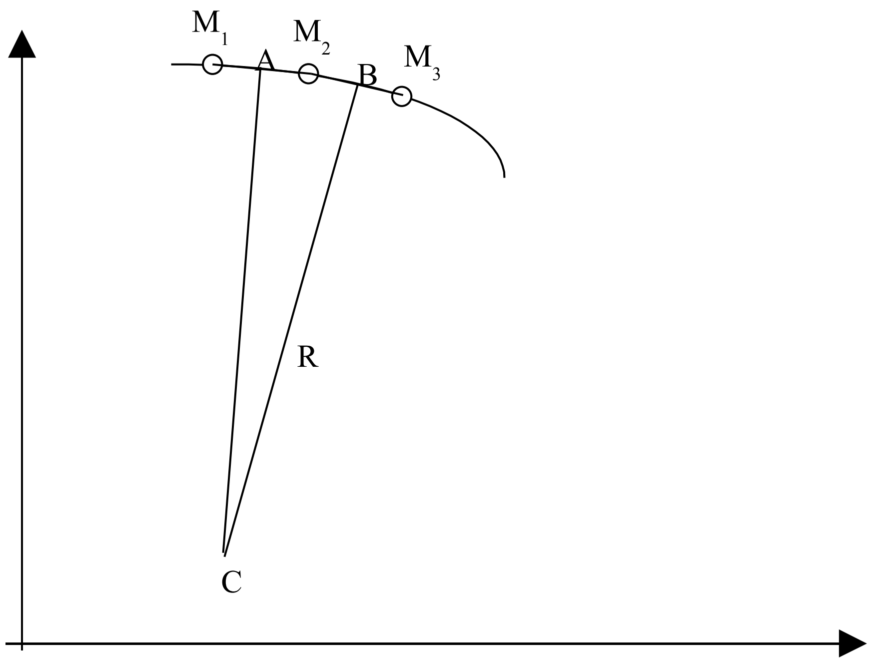
RAYON DE COURBURE



Connaissant les coordonnées de trois points voisins, on se propose de trouver le rayon R

Soit A milieu de M_1M_2 et B milieu de M_2M_3

La connaissance de l'équation des droite CA et CB permet de trouver le point C et le rayon R

Droite AC : $y = a_1x+b_1$

Ce qui fait :

$y_C = a_1x_C+b_1$
$y_A = a_1x_A+b_1$

Soit :

$$y_C = a_1x_C + y_A - a_1x_A$$

$$y_C = a_1(x_C - x_A) + y_A$$

De même :

Droite BC : $y = a_2x+b_2$

Ce qui fait :

$y_C = a_2x_C+b_2$
$y_B = a_2x_B+b_2$

Soit :

$$y_C = a_2 x_C + y_B - a_2 x_B$$
$$y_C = a_2 (x_C - x_B) + y_B$$

On égalise avec :

$$y_C = a_1 (x_C - x_A) + y_A$$

$$a_1 (x_C - x_A) + y_A = a_2 (x_C - x_B) + y_B$$

$$(a_1 - a_2) x_C + y_A - a_1 x_A = y_B - a_2 x_B$$

$$x_C = \frac{y_B - a_2 x_B - y_A + a_1 x_A}{a_1 - a_2}$$

La droite M_1M_2 étant orthogonale à la droite CA, le produit des pentes vaut -1, ce qui fait :

$a_1 a_3 = -1$ ➔ $a_1 = -1/a_3$ (a_3 étant la pente de la droite M_1M_2).

$$a_3 = \frac{y_{M2} - y_{M1}}{x_{M2} - x_{M1}} = \frac{dy_A}{dx_A}$$

$$a_1 = -\frac{dx_A}{dy_A}$$

La droite M_2M_3 étant orthogonale à la droite CB, le produit des pentes vaut -1, ce qui fait :

$A_2 a_4 = -1$ ➔ $a_2 = -1/a_4$ (a_4 étant la pente de la droite M_2M_3).

$$a_4 = \frac{y_{M3} - y_{M2}}{x_{M3} - x_{M2}} = \frac{dy_B}{dx_B}$$

$$a_2 = -\frac{dx_B}{dy_B}$$

Ce qui fait :

$$x_C = \frac{y_B - a_2 x_B - y_A + a_1 x_A}{a_1 - a_2}$$

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx_B}{dy_B} x_B - \frac{dx_A}{dy_A} x_A}{-\frac{dx_A}{dy_A} + \frac{dx_B}{dy_B}}$$

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx_B}{dy_B} x_B - \frac{dx_A}{dy_A} x_A}{\frac{dx_B}{dy_B} - \frac{dx_A}{dy_A}}$$

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx_B}{dy_B} x_B - \frac{dx_A}{dy_A} x_B + \frac{dx_A}{dy_A} x_B - \frac{dx_A}{dy_A} x_A}{\frac{dx_B}{dy_B} - \frac{dx_A}{dy_A}}$$

$$x_C = \frac{dy + x_B d\frac{dx}{dy} + \frac{dx_A}{dy_A} dx}{d\frac{dx}{dy}}$$

On aurait pu partir de :

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx_B}{dy_B} x_B - \frac{dx_A}{dy_A} x_A - \frac{dx_B}{dy_B} x_A + \frac{dx_B}{dy_B} x_A}{\frac{dx_B}{dy_B} - \frac{dx_A}{dy_A}}$$

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx_B}{dy_B} dx + x_A d\frac{dx}{dy}}{d\frac{dx}{dy}}$$

Les deux expressions sont équivalentes, on écrit :

$$x_C = \frac{dy + \frac{dx}{dy} dx + xd\frac{dx}{dy}}{d\frac{dx}{dy}}$$

En divisant tout par dy :

$$x_C = \frac{1 + \dfrac{dx^2}{dy^2} + x\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

$$x_C = \frac{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 + x\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

$$x_C = \frac{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dy^2}} + x$$

$$y_C = a_1\left(x_C - x_A\right) + y_A$$

$$y_C = -\frac{dx}{dy}\left(\frac{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}\right) + y$$

Le rayon vaut :

$R^2 = (x_C - x)^2 + (y_C - y)^2$

$$x_C - x = \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

$$y_C - y = -\frac{dx}{dy}\left(\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right)$$

$$R^2 = (x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 = \left(\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right)^2 + \left(-\frac{dx}{dy}\left(\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right)\right)^2$$

$$R^2 = (x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 = \left(\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)$$

$$\boxed{R^2 = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}}$$

Application :

Soit une fonction définie par :

$OM^2 = x^2+y^2$

On sait que cette fonction est celle d'un cercle de rayon OM, centré sur l'origine, le point O est à l'origine, les points M sont ceux du cercle.

On va simplement démontrer que le rayon calculé par la formule que l'on a établie, est bien le même.

Démontrons l'égalité :

$$R^2 = \frac{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2} = OM^2$$

On part de x = f(y) et on dérive jusqu'à l'ordre 2.

Fonction x = f(y)

$$x = \left(OM^2 - y^2\right)^{1/2}$$

Dérivée première :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(OM^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2y)$$

$$\frac{dx}{dy} = -y\left(OM^2 - y^2\right)^{-1/2}$$

Que l'on peut mettre sous la forme ci-dessous :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{OM^2 - y^2}}$$

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\left(OM^2 - y^2\right)^{-1/2} + (-y)\left[-\frac{1}{2}\left(OM^2 - y^2\right)^{-3/2}(-2y)\right]$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\left(OM^2 - y^2\right)^{-1/2} - y^2\left(OM^2 - y^2\right)^{-3/2}$$

Que l'on peut écrire :

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\left(\frac{1}{\sqrt{OM^2 - y^2}} + \frac{y^2}{(OM^2 - y^2)\sqrt{OM^2 - y^2}}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{\sqrt{OM^2 - y^2}}\left(1 + \frac{y^2}{(OM^2 - y^2)}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{\sqrt{OM^2 - y^2}}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)$$

Le rayon vaut :

$$R^2 = \left(\frac{1}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right)^2\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^3$$

$$R^2 = \left(\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{OM^2 - y^2}}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)}\right)^2\left(1 + \left(-\frac{y}{\sqrt{OM^2 - y^2}}\right)^2\right)^3$$

$$R^2 = \frac{1}{\frac{1}{OM^2 - y^2}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)^2}\left(1 + \frac{y^2}{OM^2 - y^2}\right)^3$$

$$R^2 = \frac{1}{\frac{1}{OM^2 - y^2}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)^2}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)^3$$

$$R^2 = \frac{1}{\frac{1}{OM^2 - y^2}}\left(\frac{OM^2}{OM^2 - y^2}\right)$$

$R^2 = OM^2$, la propriété est démontrée pour cet exemple.

Un seul exemple ne suffit pas à démontrer une propriété mais il laisse espérer que le résultat que l'on a établi soit correct.

Nous pouvons trouver ce résultat à l'adresse ci-dessous :

http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./c/courbure.html

Vous n'y trouverez pas de démonstration mais vous aurez tous les cas de figure, coordonnées cartésiennes, polaires etc. ça vaut la peine d'y aller.